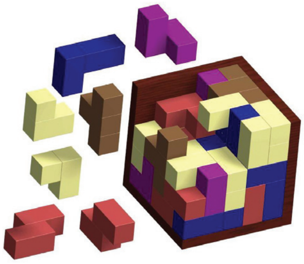
Rompecabezas matemáticos



Por Antonio Montalbán*

Continuando con la serie de problemas que se proponen en estas páginas, se plantea uno nuevo y se da la solución explicada al problema del sombrero rojo o azul planteado en el número anterior.

Nuevo problema: ¿Cuál es la moneda falsa?

Planteo:

Supongamos que tenemos 13 monedas, de las cuales una es falsa. Todas las monedas se ven iguales, la única diferencia es que la falsa pesa diferente de las demás.

Para descubrir la moneda falsa tenemos una balanza de platillos.

O sea, podemos elegir dos subconjuntos de monedas y comparar su peso, y así saber si pesan igual, o si un subconjunto pesa más que el otro.

Pregunta:

¿Cómo se puede encontrar la moneda falsa usando la balanza solo tres veces?

Problema anterior: Sombrero rojo o azul

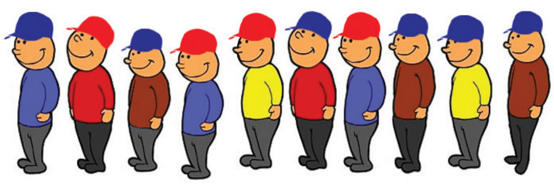
Planteo:

Imaginemos un juego que es parte de un programa de televisión que da grandes premios a los ganadores. El juego es jugado por un equipo de 10 personas. Se les indica pararse en fila india, y a cada uno se le asigna un sombrero de color rojo o azul.

Los participantes no ven el color de su propio sombrero, solo ven los sombreros de los participantes que están delante de ellos en la fila.

Uno a uno, y comenzando por el último de la fila, cada participante debe decir en voz alta el color de su propio sombrero. Si todos adivinan, el equipo gana el premio. Si alguno se equivoca, nadie gana nada.

Los miembros del equipo pueden ponerse de acuerdo en alguna estrategia antes de comenzar a jugar, pero durante el juego no se pueden comunicar entre ellos; solo ven a los jugadores que tienen enfrente y escuchan las respuestas de los que tienen atrás.



Pregunta:

¿Cuál es la mejor estrategia a aplicar? es decir ¿cuál es la estrategia que les ofrece mayor probabilidad de ganar?

Respuesta:

No es difícil ver que no hay ninguna estrategia que les haga ganar siempre. El primer jugador, por ejemplo, no tiene información exterior que le ayude a adivinar el color de su sombrero. Tiene una probabilidad de acertar de 1/2 (50%). Si tanto él como los demás tratan de adivinar su color al azar, cada jugador tiene 1/2 de posibilidades de acertar, y por lo tanto la probabilidad de que todos acierten es $1/2^{10} \approx 0{,}001$ o sea 0,1%. Esta es claramente una muy mala estrategia.

Lo sorprendente es que hay una estrategia en la que la probabilidad de que todos acierten es 1/2.

Supongamos, hipotéticamente, que los jugadores saben que el número de sombreros rojos es par. Entonces el último de la fila, el primero en tener que decir cuál es el color de su sombrero, puede contar la cantidad de sombreros rojos delante de él y ver si es par o impar. Si es impar es porque falta contar su propio sombrero, que entonces es rojo, y si es par su sombrero es azul. El jugador siguiente escucha la declaración de este jugador y cuenta los sombreros rojos que tiene delante de él, de este modo puede saber si el total (sin incluir el suyo) es par o impar y por ende deducir el color de su sombrero. Así, sucesivamente, todos los jugadores adivinarían su color correctamente. O sea que conociendo la paridad del número de sombreros rojos tienen un 100% de probabilidad de acertar.

El problema es que el primer jugador no sabe si la cantidad total de sombreros rojos es par o impar. La probabilidad de que sea un número par es igual a la de que sea impar, o sea 50%. Para que esta probabilidad se mantenga, la estrategia es la siguiente:

Previo al juego, los jugadores del equipo se ponen de acuerdo en una suposición, que el número de sombreros rojos, por ejemplo, es par.

En este caso, si al comenzar el juego el último de la fila, al decir el color de su sombrero, adivina, y, en base a lo que dice, el resto de los jugadores aplica el procedimiento descripto, todo el equipo adivinará y ganará. Si el jugador se equivoca, todos se equivocarán. De allí que el equipo tiene una probabilidad de acertar de 1/2 (50%).

****Antonio Montalbán*** *es Licenciado en Matemáticas por la Universidad de la República y PhD de la Universidad de Cornell (Estados Unidos). Actualmente es profesor titular en la Universidad de Chicago (Estados Unidos).*